Travaux dirigés- Série 4: Eléctricité II

December 11, 2014

Abstract

Université Mohammed V — **Année Universitaire 2014-2015**
Faculté des Sciences — **SMP: S3**

Electricité II
Travaux Dirigés: Série 4

Exercice I: *circuits*

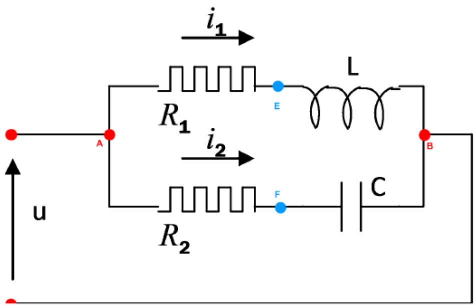
Un circuit électrique composé de 2 branches montées en parallèle: (a) une branche AB parcourue par un courant i_1, composée d'une résistance R_1 en série avec une bobine L. (b) une branche CD avec $C = A$ et $D = B$ parcouru par un courant i_2 composée une d'une résistance R_2 en série avec une capacité C.

La tension entre les deux points est $u = u_A - u_B$

Déterminer la relation entre R_1, R_2, L et C pour que $(\widehat{i_1, i_2}) = \frac{\pi}{2}$:

1) par la méthode des complexes,

2) par la méthode graphique (facultatif).



Exercice II

Une self inductance L_1 est disposée en série avec un élément composé d'une capacité C en parallèle avec une self inductance L_2. Le tout est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace V et de pulsation ω.

1) Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit,

2) Calculer la valeur efficace du courant parcourant L_1,

3) Déterminer la valeur de C pour que:

a) Le courant i_1 parcourant L_1 est nul,

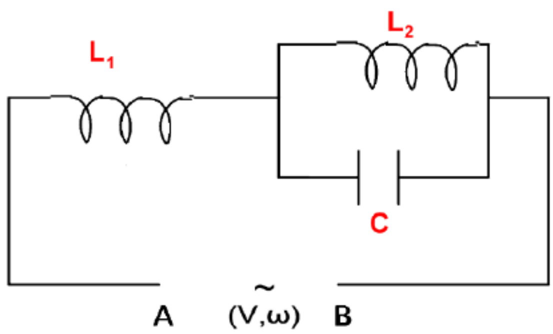
b) Le courant i_1 parcourant L_1 est infini,

On notera cette valeur C_0,

4) Dans le cas particulier $L_1 = L_2 = L$ et $C > C_0$:

a) Calculer le déphasage entre la tension V_{AB} et le courant dans la branche principale,

b) Ecrire l'expression de la tension aux bornes et le courant dans la branche principale.



Exercice III

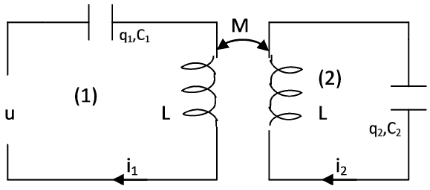
On considère un circuit électrique composé de 2 sous-circuits (1) et (2) couplés par inductance

mutuelle de coefficient M.

Le circuit (1), parcouru par un courant i_1, comprend:

un enroulement dépourvu de résistance,

de coefficient d'induction L_1 et d'induction mutuelle M, et un condensateur de capacité C_1 placée en série avec L_1; il est alimenté par un générateur de f.e.m sinusoïdale $u\,(t)$ de pulsation ω. Le circuit (2), sans tension d'alimentation, est composé d'une inductance L_2 en série avec un condensateur de capacité C_2. Les deux inductances sont placées en juxtaposition; on prendra $L_1 = L_2 = L$.



1) Déterminer l'impédance $\underline{Z}$ vue aux bornes du générateur,

2) Etudier sa variation avec ω.

Exercice IV

Un circuit électrique composé d'un condensateur C monté en série avec un sous circuit $(L//R)$ comprenant une inductance L en parallèle avec une résistance R. Le circuit est alimenté par un générateur de f.e.m sinusoidale $u\,(t)$ de pulsation ω.

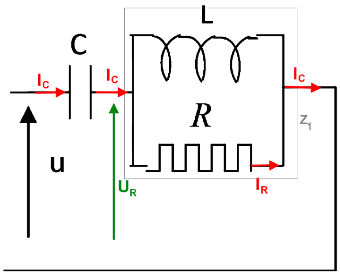
1) Faire un schéma du circuit,

2) Déterminer l'impédance $\underline{Z}_1$ du sous circuit $(L//R)$,

3) Calculer le courant complexe $\underline{I}_C$ parcourant la capacité C,

4) Calculer le courant complexe $\underline{I}_R$ parcourant la résistance R,

5) En déduire la condition pour que le courant $\underline{I}_R$ soit indépendant de la valeur de R.



Exercice V (facultatif)

Un moteur électrique alimenté par une tension alternative sinusoidale de fréquence *50Hz* sous une tension efficace *220V*, absorbe la puissance active $P = 5,5$ kW. L'intensité efficace du courant qui le traverse est $I = 32A$.

1) Calculer le facteur de puissance de ce moteur

2) Calculer la puissance réactive qu'il consomme.

3) Pour améliorer le facteur de puissance de l'installation, on place un condensateur en dérivation aux bornes du moteur.

Calculer:

a) L'intensité efficace I du courant qui parcours le réseau d'alimentation

b) La capacité C du condensateur qui permet de porter le facteur de puissance à la valeur 0.92.

On utilisera les trois méthodes:

i) La méthode des complexes

ii) Le diagramme vectoriel des intensités,

iii) La conservation des puissances réactives dans un réseau.

1 Solution de la série 4

Exercice I: *Relation entre* R_1, R_2, L, C

1) schéma du circuit, voir fig 1:

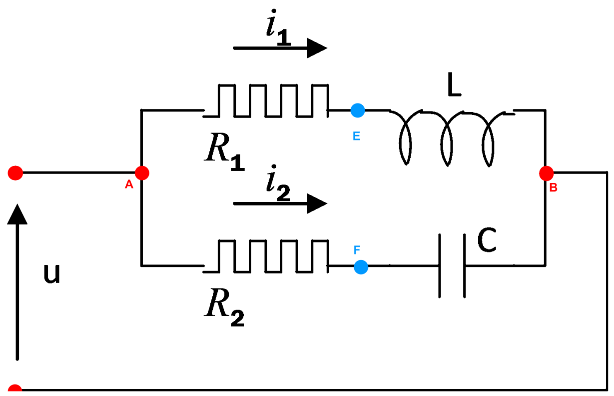


Figure 1: les courants sont décalés de 90° : $\left(\widehat{i_1, i_2}\right) = \frac{\pi}{2}$

2) relation entre R_1, R_2, L et C pour que $(\widehat{i_1, i_2}) = \frac{\pi}{2}$:

a) *par la méthode graphique*

Les courants $i_1 \to I_1$ et $i_2 \to I_2$ sont décalés de $\frac{\pi}{2}$; c'est à dire: $(\widehat{I_1, I_2}) = \frac{\pi}{2}$ qu'on peut décomposer comme suit:

$$(\widehat{I_1, U}) + (\widehat{U, I_2}) = \frac{\pi}{2}$$

La tension $U = U_{AB}$ est commune entre les deux branches:

$$AEB \quad \text{et} \quad AFB \quad : \quad \text{voir fig 1}$$

On prendra cette tension comme référence des phases

La branche $\{R_1, L\}$ est inductive	$\Rightarrow$	i_1 est alors en retard de phase par rapport à U
la branche capacitive $\{R_2, C\}$	$\Rightarrow$	i_2 est en avance par rapport à U

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_{R_1} + \vec{U}_L \\ &= \vec{U}_{R_2} + \vec{U}_C \end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{ll} \vec{U}_{R_1} & \text{est en phase avec } \vec{I}_1 \\ \vec{U}_L & \text{est en avance de phase de } \frac{\pi}{2} \text{ sur } \vec{I}_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} \vec{U}_{R_2} & \text{est en phase avec } \vec{I}_2 \\ \vec{U}_C & \text{est en retard de phase de } \frac{\pi}{2} \text{ sur } \vec{I}_2 \end{array}$$

D'où le diagramme de Fresnel suivant

On a donc

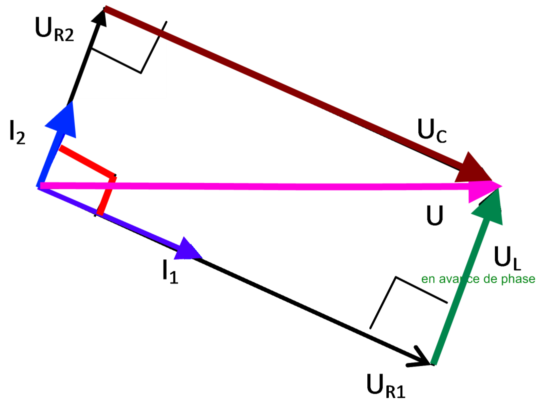


Figure 2:

$$\begin{cases} U_{R_1} = U_C \\ U_{R_2} = U_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 I_1 = \frac{1}{C\omega} I_2 \\ R_2 I_2 = L\omega I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 C\omega I_1 = I_2 \\ R_2 R_1 = \frac{L}{C} \end{cases}$$

la relation est

$$R_2 R_1 = \frac{L}{C}$$

b) <u>*par la méthode des complexes*</u>

Nous avons

$$\begin{aligned} U &= R_1 I_1 + jL\omega I_1 &&= (R_1 + jL\omega)\, I_1 \\ &= R_2 I_2 + \frac{I_2}{jC\omega} &&= \left(R_2 + \frac{1}{jC\omega}\right) I_2 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \phi_1 = (I_1, U) &\quad\Rightarrow\quad \tan\phi_1 = \frac{L\omega}{R_1} \\ \phi_2 = (U, I_2) &\quad\Rightarrow\quad \tan\phi_2 = \frac{1}{R_2 C\omega} \end{aligned}$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos(\phi_1 + \phi_2) = \begin{cases} = \ 0 \\ = \ \cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin\phi_1 \sin\phi_2 &= \cos\phi_1 \cos\phi_2 \\ \frac{\sin\phi_1 \sin\phi_2}{\cos\phi_1 \cos\phi_2} &= 1 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\tan\phi_1 \tan\phi_2 = \begin{cases} = \ 1 \\ = \ \frac{L\omega}{R_1} \times \frac{1}{R_2 C\omega} \end{cases}$$

soit

$$\frac{L\omega}{R_1 R_2 C\omega} = 1 \quad\Rightarrow\quad R_1 R_2 = \frac{L}{C}$$

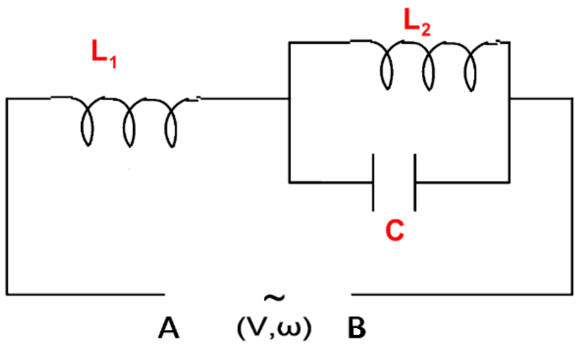


Figure 3:

Exercice II

1) schéma, voir fig 3

2) impédence complexe du circuit entre A et B

$$\bar{Z} = jL_1\omega + \bar{Z}_2$$

avec

$$\frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{jL_2\omega} + jC\omega = \frac{1 - L_2C\omega^2}{jL_2\omega}$$

d'où

$$\bar{Z}_2 = \frac{jL_2\omega}{1 - L_2C\omega^2}$$

Résultat

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j\left(L_1\omega + \tfrac{L_2\omega}{1-L_2C\omega^2}\right) \\ &= j\left(\tfrac{L_1+L_2-L_1L_2C\omega^2}{1-L_2C\omega^2}\omega\right) \end{aligned}$$

3) valeur efficace du courant parcourant L_1

Elle est exprimée en fonction de la tension $\bar{V}$ et l'impédence $\bar{Z}$ par le biais de la loi d'Ohm

$$\bar{V} = \bar{Z}\ \bar{I}_{L_1}$$

soit

$$I_{L_1} = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\left|L_1\omega + \frac{L_2\omega}{1-L_2C\omega^2}\right|}$$

résultat

$$I_{L_1} = \frac{V\left(1 - L_2C\omega^2\right)}{\omega\left|L_1\left(1 - L_2C\omega^2\right) + L_2\right|}$$

4) valeur de C pour que:
a) le courant i_1 parcourant L_1 est nul,

$$I_{L_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V\left(1 - L_2 C\omega^2\right)}{\omega\left|L_1\left(1 - L_2 C\omega^2\right) + L_2\right|} = 0$$

soit

$$V\left(1 - L_2 C\omega^2\right) = 0$$

Résultat

$$C = \frac{1}{L_2\omega^2}$$

b) le courant i_1 parcourant L_1 est infini, On notera cette valeur C_0

$$I_{L_1} = \infty \qquad \Rightarrow \quad \left|\bar{Z}\right| = \frac{\left(1 - L_2 C\omega^2\right)}{\omega\left|L_1\left(1 - L_2 C\omega^2\right) + L_2\right|} = \infty$$

soit

$$\omega\left|L_1\left(1 - L_2 C\omega^2\right) + L_2\right| = 0$$

Résultat

$$C = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 \omega^2} = C_0$$

5) Dans le cas particulier $L_1 = L_2 = L$ et $C > C_0$:

$$L_1 = L_2 = L \quad , \quad C > C_0 = \tfrac{2}{L\omega^2}$$

a) le déphasage entre la tension V_{AB} et le courant dans la branche principale
Le déphasage

$$\varphi = \arg\bar{V} - \arg\bar{I}_{L_1}$$

est obtenu à partir de la relation

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{Z}\ \bar{I}_{L_1} \\ \arg\bar{V} &= \arg\bar{Z} + \arg\bar{I}_{L_1} \end{aligned}$$

soit alors

$$\varphi = \arg\bar{Z}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j\omega\left(\tfrac{\left(L_1 + L_2 - L_1 L_2 C\omega^2\right)}{1 - L_2 C\omega^2}\right) \\ &= j\omega\left(\tfrac{L\left(2 - LC\omega^2\right)}{1 - LC\omega^2}\right) \end{aligned}$$

qui est un imaginaire pur; donc φ est:

$$\text{soit} \quad \tfrac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -\tfrac{\pi}{2}$$

Pour détérminer le signe, nous utilisons les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
C > \tfrac{2}{L\omega^2} \quad &\Rightarrow \quad CL\omega^2 > 2 \\
&\Rightarrow \quad 2 - CL\omega^2 < 0 \\
&\Rightarrow \quad 1 - CL\omega^2 < 0 \\
\\
&\Rightarrow \quad \omega\left(\tfrac{L\left(2-LC\omega^2\right)}{1-LC\omega^2}\right) > 0 \\
&\Rightarrow \quad \varphi = \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

b) expression de la tension aux bornes A-B et le courant dans la branche principale.

i) Tension aux bornes A-B

$$v\,(t) = V\sqrt{2}\cos\omega t$$

ii) *courant parcourant* L_1

$$i\,(t) \quad = \quad I_{L_1}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

avec

$$I_{L_1} \quad = \quad \tfrac{V\left(1-LC\omega^2\right)}{L\omega(2-LC\omega^2)}$$

Exercice III

1) schéma, voir fig 4

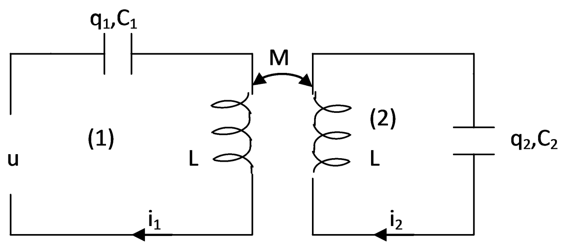


Figure 4: circuits mutuellement couplés

2) impédence $\bar{Z}$ vue aux bornes du générateur,

Appliquons la *loi d'Ohm* pour les 2 circuits:

a) *circuit* (1)

$$u \quad = \quad \tfrac{q_1}{C} + L\tfrac{di_1}{dt} + M\tfrac{di_2}{dt}$$

avec

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt}, \qquad q_1 = \int i_1 dt$$

b) *circuit* (2)

$$0 \quad = \quad \tfrac{q_2}{C} + L\tfrac{di_2}{dt} + M\tfrac{di_1}{dt}$$

avec

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt}$$

En notation complexe

$$i_1 = I_1 e^{j\omega t}$$

$$\bar{U} = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) I_1 + jM\omega I_2 \quad (1)$$

$$0 = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) I_2 + jM\omega I_1 \quad (2)$$

$$\text{eq}(2) \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{-jM\omega I_1}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\text{eq}(1) + \text{eq}(3) \quad \Rightarrow \quad \bar{U} &= \left(\tfrac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) I_1 + jM\omega \left(\frac{-jM\omega I_1}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\right) \\
&= \left(\tfrac{1}{jC\omega} + jL\omega + \frac{M^2\omega^2}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\right) I_1 \\
&= \bar{Z}\ I_1
\end{aligned}$$

Résultat: l'impédence est:

$$\begin{aligned}
\bar{Z} &= j\left(L\omega - \tfrac{1}{C\omega} - \frac{M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right) \\
&= j\,\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 - M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \\
&= j\,\frac{\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 - M^2\omega^2}{\frac{L}{\omega}\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)}
\end{aligned}$$

$$\left|\bar{Z}\right| = Z = \left|\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 - M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right|$$

3) variation $\bar{Z} = \bar{Z}(\omega)$

a) $\bar{Z}(\omega)$ est nulle pour:

$$\left(L\omega - \tfrac{1}{C\omega}\right) = \pm M\omega \quad \Rightarrow \quad (L \mp M)\,\omega^2 = \tfrac{1}{C}$$

$$\begin{aligned}
(L+M)\,\omega_1^2 &= \tfrac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\tfrac{1}{C(L+M)}} \\
(L-M)\,\omega_2^2 &= \tfrac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\tfrac{1}{C(L-M)}}
\end{aligned}$$

avec comme condition

$$L \neq M$$

ce qui est toujours vrai puisque on a toujours

$$M^2 < L_1 L_2 = L^2 \quad \Rightarrow \quad M < L$$

b) $\bar{Z}(\omega)$ est infini pour

$$\begin{aligned} Z &= j\frac{\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)^2-M^2\omega^2}{\frac{L}{\omega}\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)} \\ &= j\frac{L^2\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)^2-M^2\omega^4}{L\omega\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)} \quad \rightarrow \quad \infty \end{aligned}$$

pour

$$\omega_3 = 0 \quad , \quad \omega_4 = \frac{1}{LC}$$

c) *conclusion*
Le système se comporte comme

- un circuit *résonant* au voisinage de $\omega_1$et ω_2; c'est-à-dire laisse passer un courant infini débité par le générateur de pulsation ω_1 ou ω_2.
- Par contre il se comporte comme un circuit bouchon (anti - résonance) au voisinage de ω_4; c'est-à-dire arrête totalement le courant débité par un générateur de pulsation ω_4.

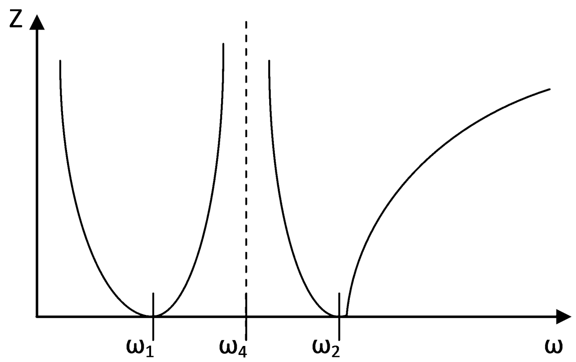


Figure 5:

Exercice IV
1) schéma du circuit
Le circuit est alimenté par une tension sinusioidale u de pulsation ω.

2) impédence $\bar{Z}_1$ du sous circuit $(L//R)$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + jL\omega}{jRL\omega} \qquad \Rightarrow \qquad Z_1 = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

3) Expression complexe I_C du courant traversant la capacité C

$$U = ZI_C$$

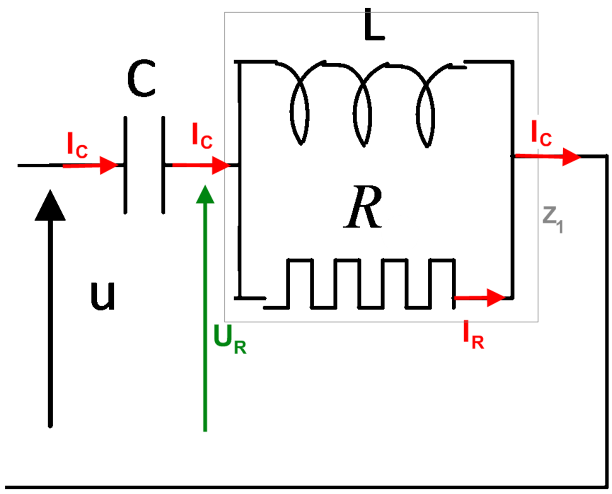


Figure 6:

avec

$$Z = \frac{1}{jC\omega} + Z_1$$

donc

$$I_C = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + Z_1} = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}$$

4) Expression complexe I_R du courant traversant R en fonction de Z_1, I_C et R

$$U_R = RI_R = Z_1 I_C$$

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{Z_1 I_C}{R} \\ &= \frac{jRL\omega}{R\,(R + jL\omega)} \times \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}} \\ &= \frac{jL\omega U}{\frac{R+jL\omega}{jC\omega} + jRL\omega} \\ &= \frac{LC\omega^2 U}{R\,(LC\omega^2 - 1) - jL\omega} \end{aligned}$$

5) la condition pour que le courant I_R soit indépendant de la valeur de R:

$$LC\omega^2 - 1 = 0$$

d'où

$$I_R = jC\omega U = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega}}$$

qui est indépendant de R.

2 Exercice V